1. ★ Als de nulpunten van $5z^2+13z-p$ elkaars omgekeerde zijn, bepaal dan de waarde van p.

   Noem de wortels w en $\frac{1}{w}$, dan geldt: $-\frac{p}{5}=w\cdot\frac{1}{w}\Leftrightarrow p=-5$

2. ★ Heeft de veelterm y^4+4y^2+5 reële nulpunten of niet?

   Neen want hij is duidelijk overal groter of gelijk aan 5 voor alle waarden van y.

3. ★ Vind een veelterm van de tweede graad met als som van de nulpunten $2\sqrt{3}$ en als product 5.

   Dit is bijvoorbeeld $x^2-2\sqrt{3}x+5$, wegens de regel van som en product. Maar deze heeft (binnen de reële getallen) geen nulpunten. Zo een veelterm bestaat dus niet.

4. ★ Het product van twee nulpunten van $2x^3+3x^2-5x-6$ is -3. Bepaal het derde nulpunt.

   Het product van alle wortels is $-\frac{-6}{2}=3$ (Viète). Het gezochte nulpunt is dus -1.

   Dit kan ook met het algoritme van Horner gevonden worden, maar dat is véél omslachtiger:

	2	3	-5	-6
-1		-2	-1	6
	2	1	-6	0
-2		-4	6	
	2	-3	0	

   Uit het algoritme van Horner volgt dat de nulpunten gegeven worden door -1, -2 en $3/2$. Het gezochte nulpunt is dus -1, aangezien $-2\cdot\frac{3}{2}=-3$.

5. ★★* Vind de veelterm van zo klein mogelijke graad die je kan aftrekken van $x^4+2x^3-4x^2+6x-3$ zodat het verschil deelbaar is door x^2-x+1.

   Dan moet dus $x^4+2x^3-4x^2+6x-3-A(x)=\left(x^2-x+1\right)\cdot B(x)$.

   Stel dat A van graad 0 kan zijn, dan stellen we $A(x)=a$ en $B(x)=cx^2+dx+e$.

   Dan wordt de vergelijking $x^4+2x^3-4x^2+6x-3-a=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(cx^2+dx+e\right)$, of na vereenvoudiging: $x^4+2x^3-4x^2+6x-3-a=cx^4+(d-c)x^3+(e-d+c)x^2+(d-e)x+e$.

   Dit geeft het stelsel: $\begin{cases}1=c\\2=d-c\\-4=e-d+c\\6=d-e\\-3-a=e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\d=3\\\boxed{\begin{matrix}e=-2\\e=-3\end{matrix}}\\a=0\end{cases}$. Dit is onmogelijk ↯.

   Stel dat A van graad 1 kan zijn, dan stellen we $A(x)=ax+b$ en $B(x)=cx^2+dx+e$.

   Dan wordt de vergelijking $x^4+2x^3-4x^2+6x-3-ax-b=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(cx^2+dx+e\right)$, of na vereenvoudiging:

   $x^4+2x^3-4x^2+(6-a)x-3-b=cx^4+(d-c)x^3+(e-d+c)x^2+(d-e)x+e$.

   Dit geeft het stelsel: $\begin{cases}1=c\\2=d-c\\-4=e-d+c\\6-a=d-e\\-3-b=e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\d=3\\e=-2\\a=1\\b=-1\end{cases}$. Dit geeft ons de oplossing $A(x)=x-1$.

6. ★★★ Voor welke waarde van $a \in \mathbb{R}$ vormen de nulpunten van $f(x) = x^3 - 12x^2 + 39x + a$ een rekenkundige rij?
De som van de nulpunten is 12 wegens de somformule van Viète. Aangezien de nulpunten x_1, x_2 en x_3 een rekenkundige rij vormen kunnen we stellen dat $x_1 = 4 - g$, $x_2 = 4$ en $x_3 = 4 + g$.
De extra fomule van Viète geeft ons dan:
$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = 39 \Leftrightarrow (4-g) \cdot 4 + 4 \cdot (4+g) + (4+g) \cdot (4-g) = 39 \Leftrightarrow g^2 = 9$.
In beide gevallen zijn de wortels $1, 4$ en 7 met als product 28 zodat de productformule van Viète ons levert dat $a = -28$.

7. ★★★ De wortels van $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ vormen een rekenkundige rij.
Bewijs dat $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.
Noem de wortels $x_1 = m - v$, $x_2 = m$ en $x_3 = m + v$, dan geldt wegens de formules van Viète:
$a = x_1 + x_2 + x_3 = 3m$,
$b = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = (m-v) \cdot m + m \cdot (m+v) + (m+v) \cdot (m-v) = 3m^2 - v^2$ en
$c = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (m-v) \cdot m(m+v) = m^3 - mv^2$.
Dus is $2a^3 - 9ab + 27c = 2(3m)^3 - 9 \cdot 3m \cdot (3m^2 - v^2) + 27(m^3 - mv^2) = 0$ □

8. ★★ -1 en 1 zijn nulpunten zijn van de veelterm $Lx^4 + Mx^3 + Nx^2 + Rx + P$.
Bewijs dat $L + N + P = M + R = 0$.
-1 is een nulpunt als en slechts als $L - M + N - R + P = 0$.
1 is een nulpunt als en slechts als $L + M + N + R + P = 0$.
Deze vergelijking lid aan lid optellen geeft $2L + 2N + 2P = 0 \Leftrightarrow L + N + P = 0$.
Ze lid aan lid aftrekken geeft $-2M - 2R = 0 \Leftrightarrow M + R = 0$. □

9. ★★ Zowel $x^2 + px + q$ als $x^2 + mx + n$ (met $m \neq p$) zijn deelbaar door $x + a$.
Bewijs dat $a = \dfrac{n-q}{m-p}$.
$-a$ moet dus een nulpunt zijn van zowel $x^2 + px + q$ als $x^2 + mx + n$, zodat:
$a^2 - pa + q = a^2 - ma + n\,(= 0) \Leftrightarrow (m-p)a = n - q \Leftrightarrow a = \dfrac{n-q}{m-p}$ (want $m \neq p$).

10. ★★⋆ α, β, γ zijn de nulpunten van de veelterm $kx^3 + 7x + 6$, met $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 18$. Bepaal k.
De formules van Viète leveren ons (samen met het gegeven):

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 7/k \\ \alpha\beta\gamma = -6/k \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha - \beta \\ \alpha\beta + \beta(-\alpha - \beta) + (-\alpha - \beta)\alpha = 7/k \\ \alpha\beta(-\alpha - \beta) = -6/k \\ \alpha^3 + \beta^3 + (-\alpha - \beta)^3 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha - \beta \\ \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = -7/k \\ \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 6/k \\ -3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = 18 \end{cases}$$

Als je de laatste twee vergelijkingen met elkaar vergelijkt vind je: $-18/k = 18 \Leftrightarrow k = -1$.
(merk op dat je het stelsel niet helemaal hoeft op te lossen!

11. ★⋆ -1 en -2 zijn twee oplossingen van $ax^3 + 3x^2 - bx - 6 = 0$. Bepaal de reële parameters a en b en vind ook de derde oplossing.

$$\begin{cases} a(-1)^3 + 3(-1)^2 - b(-1) - 6 = 0 \\ a(-2)^3 + 3(-2)^2 - b(-2) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ -4a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Het product van de wortels van $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$ is 3 (Viète), zodat de derde oplossing $\dfrac{3}{2}$ moet zijn.

12. ★★* Twee nulpunten van de kubische veelterm x^3-2x^2+qx-r zijn tegengesteld. Bewijs dat $2q=r$.

Stel dat de twee tegengestelde wortels α en $-\alpha$ zijn. Dan moet dus gelden dat:

$$\begin{cases}\alpha^3-2\alpha^2+q\alpha-r=0\\-\alpha^3-2\alpha^2-q\alpha-r=0\end{cases}\overset{l.a.l.-}{\underset{l.a.l.+}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}2\alpha^3+2q\alpha=0\\-4\alpha^2-2r=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha\left(\alpha^2+q\right)=0\\r=-2\alpha^2\end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat ofwel $\alpha=0$, ofwel dat $\alpha^2=-q$.

- $\alpha=0$, dan is ook $-\alpha=0$ dus is dat geval is $x=0$ een dubbele wortel, en dan moet $q=r=0$.
- $\alpha^2=-q$, dan volgt uit de tweede vergelijking dat $4q-2r=0$. □

Een alternatieve oplossing volgt direct uit de formules van Viète voor derdegraadsvergelijkingen:
Noem de wortels van de derdegraadsvergelijking $\alpha,-\alpha$ en γ, dan geldt

$$\begin{cases}\alpha-\alpha+\gamma=2\\-\alpha^2+\alpha\gamma-\alpha\gamma=q\\-\alpha^2\gamma=r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=2\\\left.\begin{array}{l}q=-\alpha^2\\r=-2\alpha^2\end{array}\right\}r=2q\quad\square\end{cases}$$

13. ★★★ α,β en γ zijn de nulpunten van de veelterm x^3+px^2+qx+2, waarbij geldt $\alpha\beta+1=0$. Bewijs dat $2p+q+5=0$.

Uit de formules van Viète voor derdegraadsvergelijkingen volgt:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-p\\\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q\\\alpha\beta\gamma=-2\end{cases}\overset{\boxed{\alpha\beta=-1}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\alpha+\beta+2=-p\\-1+2\alpha+2\beta=q\\\gamma=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{l}p=-\alpha-\beta-2\\q=-1+2\alpha+2\beta\end{array}\right\}2p+q+5=0\\\gamma=2\end{cases}$$